Soluzione

Esame di Elementi di Logica e Strutture Discrete

Corso di Laurea in Informatica

Prova parziale del 29·10·2024 – secondo turno

Esercizio 1. Dimostriamo che la relazione R su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 10k$$

è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione.

R **è riflessiva. (2 punti)** $\forall x \in \mathbb{N} : R(x, x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 10k$ è vero, perché esiste tale intero ed è $k = 0$.

R **è simmetrica. (2 punti)** $\forall x, y \in \mathbb{N} : R(x, y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 10k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = -10k$, dove si è moltiplicato primo e secondo membro per il numero intero -1. Siccome $k \in \mathbb{Z}$, allora $-k \in \mathbb{Z}$. Possiamo chiamare q l'opposto di k, per ottenere $\exists q \in \mathbb{Z} : y - x = 10q$, che è proprio la definizione di $R(y, x)$.

R **è transitiva. (2 punti)** Sia $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : R(x, y) \wedge R(y, z)$. Allora, per definizione di R, esistono $k, q \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$\begin{cases} x - y = 10k \\ y - z = 10q \end{cases}$$

da cui si ottiene $x - y + y - z = 10(k + q)$, ovvero $x - z = 10(k + q)$. Chiamata j la somma di k e q, si ha che $j \in \mathbb{Z}$ e $x - z = 10j$. Questa è proprio la definizione di $R(x, z)$, quindi prova la proprietà transitiva. □

Consideriamo la divisione intera di x per 10 e la divisione intera di y per 10. Si otterranno, rispettivamente, un quoziente Q e un resto R per x, e un quoziente Q' e un resto R' per y.

$$x = 10 \cdot Q + R$$
$$y = 10 \cdot Q' + R'$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima, si ottiene:

$$x - y = 10 \cdot (Q - Q') + (R - R') \tag{1}$$

D'altra parte, se vale $R(x, y)$, allora deve esistere un intero k tale che $x - y = 10k$. Osserviamo che, nella (1), $Q - Q'$ è un numero intero. Supponendo allora $R(x, y)$, dalla (1) si ottiene che $k = Q - Q'$ e $R - R' = 0$, ovvero $R = R'$. Da questo ragionamento si deduce che vale $R(x, y)$ se e solo se x e y hanno lo stesso resto $R = R'$ nella divisione per 10.

Siccome $R(x, y)$ vale se e solo se x ha lo stesso resto di y nella divisione per 10, il numero di possibili resti ottenibili dividendo per 10 è anche il numero di classi di equivalenza della relazione R. Osserviamo che tale resto è sempre l'ultima cifra decimale di x (l'unità), ovvero può assumere solo valori da 0 a 9. Quindi, R partiziona $\mathbb{N}$ in 10 classi di equivalenza. **(2 punti)**

Esercizio 2. Sia $P_3 = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$ l'insieme delle prime sei potenze di 3, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in P_3 : R(x, y) \Leftrightarrow x|y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$$

Dimostriamo che R su P_3 è una relazione d'ordine.

Dimostrazione.

R **è riflessiva. (1 punto)** $\forall x \in P_3 : R(x, x) \Leftrightarrow x|x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = mx$ è vero, perché esiste tale intero ed è $m = 1$.

R **è anti-simmetrica. (4 punti)** Sia $\forall x, y \in P_3 : R(x, y) \wedge R(y, x)$. Allora, per definizione di R, esistono $m, q \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$\begin{cases} y = mx \\ x = qy \end{cases}$$

da cui: $y = m(qy)$, che per la proprietà associativa della moltiplicazione diventa $y = (mq)y$. Poiché l'equazione sia verificata, dev'essere $mq = 1$, e inoltre $m, q \in \mathbb{Z}$. Si hanno due possibilità:

$$m = q = -1 \tag{2}$$

$$\vee$$

$$m = q = 1 \tag{3}$$

Nel caso (2), si otterrebbe $y = -x$ oppure $x = -y$, dalla definizione di R. Ma questa situazione non è possibile, dato che $x, y \in P_3$ e dunque $x > 0 \wedge y > 0$. Quindi, resta il caso (3), che porta a $x = y$.

R **è transitiva. (3 punti)** Sia $\forall x, y, z \in P_3 : R(x, y) \wedge R(y, z)$. Allora, per definizione di R, esistono $m, q \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$\begin{cases} y = mx \\ z = qy \end{cases}$$

da cui si ottiene $z = q(mx)$. Per la proprietà associativa della moltiplicazione, diventa $z = (qm)x$. Siccome $q, m \in \mathbb{Z}$, allora anche $mq \in \mathbb{Z}$, perché il prodotto di interi è ancora un intero. Chiamando j tale intero ($j = mq$), si ottiene: $z = jx$, che è proprio la definizione di $R(x, z)$.

□

Disegniamo il diagramma di Hasse della relazione R su P_3.

$$1 \bullet \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{9}{\bullet} \longrightarrow \overset{27}{\bullet} \longrightarrow \overset{81}{\bullet} \longrightarrow \bullet\ 243$$

Dal diagramma, è semplice notare che la relazione R definisce un ordine totale su P_3.

Osservando il grafico, si nota che la relazione ha un elemento minimale: 1. Inoltre, essa ha un elemento massimale: 243. **(1 punto)**

Esercizio 3. Si ha la seguente somma.

$$\sum_{i=0}^{n} (2^i + 6i^2)$$

Per calcolarne il valore, è sufficiente applicare le somme notevoli (3) e (5) del formulario. **(3 punti)**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}(2^i+6i^2) &= \sum_{i=0}^{n}2^i+6\sum_{i=0}^{n}i^2 && \text{(Linearità della somma)}\\
&= \sum_{i=0}^{n}2^i+6\cdot 0^2+6\sum_{i=1}^{n}i^2 && \text{(Definizione di sommatoria)}\\
&= \frac{1-2^{n+1}}{1-2}+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{(Formule (3) e (5))}\\
&= 2^{n+1}-1+n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

Ora, dimostriamo per induzione la proprietà

$$P(n):\sum_{i=0}^{n}(2^i+6i^2)=2^{n+1}-1+n(n+1)(2n+1)$$

Dimostrazione.

Caso base. (2 punti) Sia $n=0$. Quindi, $P(0)$ diventa:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0}(2^i+6i^2) &= 2^{0+1}-1+0(0+1)(2\cdot 0+1)\\
2^0+6\cdot 0^2 &= 2-1+0\\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Perciò $P(0)$ è vera e caso base è verificato.

Passo induttivo. (4 punti) Dobbiamo dimostrare che vale $P(n+1)$, data $P(n)$. Scriviamo la proprietà $P(n+1)$.

$$P(n+1):\sum_{i=0}^{n+1}(2^i+6i^2)=2^{n+2}-1+(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2^i+6i^2) &= \sum_{i=1}^{n}(2^i+6i^2)+2^{n+1}+6(n+1)^2 && \text{(Definizione di sommatoria)}\\
&= 2^{n+1}-1+n(n+1)(2n+1)+2^{n+1}+6(n+1)^2 && \text{(Ipotesi induttiva)}\\
&= 2\cdot 2^{n+1}-1+n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2 && \text{(Sommo i } 2^{n+1}\text{)}\\
&= 2^{n+2}-1+(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)) && \text{(Raccolgo } (n+1) \text{ nel III e IV addendo)}\\
&= 2^{n+2}-1+(n+1)(2n^2+n+6n+6)\\
&= 2^{n+2}-1+(n+1)(2n^2+4n+3n+6) && \text{(Distribuisco su } n\text{)}\\
&= 2^{n+2}-1+(n+1)(2n(n+2)+3(n+2)) && \text{(Raccolgo } 2n \text{ e } 3\text{)}\\
&= 2^{n+2}-1+(n+1)(n+2)(2n+3) && \text{(Raccolgo } n+2\text{)}
\end{aligned}$$

La catena di uguaglianze mi ha portato a dimostrare $P(n+1)$ a partire dall'ipotesi induttiva, quindi il passo induttivo è verificato. □